

A méretarány-tényező néhány alkalmazásáról a földmérésben

Busics György

DOI: <https://doi.org/10.30921/GK.71.2019.4.3>

Absztrakt: A méretarány-tényező a mérőállomások egyik beállítási paramétere, ami a mért ferde távolságok vetületi távolságokká való redukálását teszi lehetővé valós időben. Ebben az írásban a méretarány-tényező gyakorlati célú alkalmazását, értelmezését mutatjuk be, ami az összevont (kombinált) méretarány-tényező fogalmának bevezetéséhez vezet. Az összevont méretarány-tényező (hányadosként vagy ppm egységben kifejezve) első értelmezésben a vetületi javítás és az alapfelületi javítás összege, de más redukciók is bevonhatók ebbe. Egyes speciális mérnökeodéziai feladatoknál ellenjavallt a távolságok vetületi síkra redukálása.

A méretarány-tényező a koordináta-transzformációknak is egyik paramétere, így a transzformációs méretarány-tényező jellemzőinek, eloszlásának vizsgálata lehetővé teszi a nagy (országnyi) területre kiterjedő geodéziai hálózatok közötti viszony elemzését. A hagyományos háromszögelési hálózatok kiegyenlítésekor szabályos hiba keletkezhetett a távolságok mérésében vagy redukálásában alkalmazott módszer következtében. Az ilyen típusú szabályos hiba síkbeli vagy térbeli hasonlósági transzformációval jól kimutatható, amennyiben a klasszikus alappontokat statikus GNSS technológiával újramérjük. Példaként a magyar HD72 és az ETRS89 vonatkoztatási rendszerek közötti méretarány-tényező alakulását, eloszlását mutatjuk be.

Abstract: The scale factor is one of the setting parameters of total stations that allows the real-time reduction of the measured slope distance onto the map grid. In our paper, we discuss the interpretation of the scale factor depending on the application that leads to the introduction of the combined scale factor. The combined scale factor in ppm unit is the sum of the sea level reduction and the point scale factor. Special tasks in construction survey do not require the reduction of the distances onto the map grid.

Coordinate transformation between different datums can also be used to investigate the characteristics and distribution of the scale factor over large areas. The adjustment of classical triangulation may contain systematic errors due to the methodology of distance reductions. These systematic discrepancies can precisely be detected applying planar or spatial similarity transformation over large areas where the original points have been re-observed during the campaign of static GNSS control survey. As an example, we analyse the scale difference and its distribution between the Hungarian Datum 72 and ETRS 89.

Kulcsszavak: méretarány-tényező, lineármódulusz, alapfelületi redukció, összevont méretarány-tényező, ETRS–HD72 transzformáció

Keywords: scale factor, point scale factor, sea level reduction, combined scale factor, ETRS89 and HD72 datum transformation

A térkép méretaránya és vetülete

A térkép méretaránya alapfogalom, amely alatt a térképi hosszak és a térkép vetületi rendszerében az azoknak megfelelő távolságok arányát értjük [7] [10]. Hazay István 1986-os akadémiai székfoglalójában megállapította, hogy ez „a nagyon egyszerűnek vélt fogalom még ma is igen zavaros”, mivel több helyütt a vetületi távolság helyett terepi vagy alapfelületi távolságot szerepeltetnek [7]. Itt megemlítem, hogy a térkép méretarányát nem szerencsés méretarány-tényezőnek nevezni (előfordul ilyen még jogszabályokban is), mert ez utóbbi kifejezést más fogalom megnevezésére használjuk.

Térkép alatt most nagyméretarányú analóg térképet értünk, amely

valamilyen vetületi rendszerben készült. Feltételezzük tehát, hogy választottunk egy konkrét vetületet az országnyi méretű terület térképlapon történő ábrázolásához. A geodéziai gyakorlatban alkalmazott vetületek torzulás szempontjából szögtartók, ami a nagyszámú szögmérés miatt volt célszerű, mert így az alapfelületről a képfelületre vetítéskor nem kellett redukcióval számolni (kivéve a második irányredukciót). A távolságok és a területek viszont jelentősen torzulhatnak a vetítés során. Amennyiben változik a vetület (ami ténylegesen is változott Magyarországon az elmúlt évszázadban), értelemszerűen változik az ábrázolt földrészletek kerülete és területe is.

A térkép méretaránya az alkalmazott hosszsmértékegység függvénye is.

A régebbi kataszteri térképeink méretaránya jellemzően 1:2880 volt, mert a bécsi öles mértékrendszerben készültek. Egy bécsi hüvelyknyi térképi távolság a vetületen 40 bécsi ölnél felelt meg ($40 \text{ öl} = 40 \times 6 \text{ láb} = 40 \times 6 \times 12 = 2880 \text{ hüvelyk}$). A méterrendszerben készült térképek méretaránya a 10 egész számú hatványa szerint alakul úgy, hogy az ábrázolt objektumok megfelelően szemlélhetők és kezelhetők legyenek. Így a belterületek ábrázolásakor 1:1000 vagy 1:2000, külterület esetében 1:4000 a jellemző térképi méretarány.

A hagyományos térkép méretarányával függ össze a rajzi pontosság fogalma, amin a térképről lemérhető távolságok és koordináták mérési bizonytalanságát értjük. A rajzi pontosság legjobb esetben 0,1 mm, de inkább

ennek kétszerese. Ez az 1:1000 méretarányánál 10 centimétert, az 1:4000 méretarányánál 40 centimétert jelent. Ha csak maga a rajzolt térkép áll rendelkezésre, ekkora hiba (de inkább ennek kétszerese) terheli a térképről mért távolságadatokat, nem beszélve most a többi hibaforrásról. Nem szabad elfeledkezni arról, hogy bár nagyméretarányú térképeinket digitalizálták, de az így készült digitális térkép pontossága sem lehet jobb, mint az eredeti papírtérképé volt.

A térkép egy vízszintes vonatkoztatási rendszert is megvalósít, nemcsak mértékrendszert és vetületet. A jelenlegi magyar vízszintes vonatkoztatási rendszert HD72 névvel rövidítjük (HD: *Hungarian Datum*, azaz a magyar geodéziai dátum). A HD72 vonatkoztatási rendszer részei a GRS67 forgási ellipszoid (mint alapfelület), az EOV (Egységes Országos Vetületi rendszer), mint képfelület, az EOVA (Egységes Országos Vízszintes Alapponthálózat) és a méter hosszmértékegység.

Rendszeresen felmerül a kérdés, érdemes-e áttérni más vetületre? Egyetértőleg idézem Varga József egykori kollégánk véleményét: „Új alapfelület bevezetése akkor indokolt, ha új háromszögelési hálózatot helyezünk el rajta, vagy nemzetközi kapcsolatok miatt van rá szükség. A bevezetésnek ilyenkor is csak akkor van értelme, ha a háromszögelési hálózatot összekapcsolják a csatlakozó területével, majd a közös hálózatot együttesen kiegyenlítve helyezik el az új alapfelületen. Nem elég ugyanis csak az új alapfelület méreteit átvenni, ha annak elhelyezése nem egyezik meg a csatlakozó területen alkalmazott alapfelületével. Nem indokolt új vetületi rendszert bevezetni akkor, ha az alapfelületet és a háromszögelési hálózatot változatlanul megtartjuk.” [11]

Az EOV és hossztorzulásának figyelembevétele

Az EOV egy kettős vetítéssel létrejött szögtartó, redukált, ferde tengelyű, két hossztartó paralelkörű hengervetület, amelynek alapfelülete a GRS67 ellipszoid (GRS: *Geodetic Reference System*). Ezt az ellipszoidot

szokás volt korábban IUGG1967-ként jelölni.

Az EOV fenti jellemzésében a *redukált* jelző azt jelenti, hogy a vetületi egyenletekkel kapott mindkét képfelületi koordinátát megszorozzuk egy 1-nél kisebb számmal, mely számot *vetületi méretarány-tényezőnek* nevezzük és m_0 -al jelöljük. Az EOV esetében a vetületi méretarány-tényező értéke $m_0 = 0,99993$. Ez azt jelenti, hogy ahol eddig (érintő elhelyezést feltételezve) nem volt hossztorzulás, ott hosszrövidülés lesz, a hossznagyobbodás mértéke pedig (az egész ország területét tekintve) csökken, így összességében, abszolút értékben kisebb lesz a hossztorzulás mértéke, mintha érintő elhelyezésű lenne a vetület.

A hossztorzulás mértékét a lineármódusz fejezi ki, ami egy elemi hosszúságú képfelületi vonal darab (dt) és annak alapfelületi megfelelőjének (ds) a hányadosa (jelölése: l).

$$l = \frac{dt}{ds} \quad (1)$$

A gyakorlatban véges hosszúságú távolságokra vonatkozóan a hossztorzulási tényezőt használjuk (a vetülettanban rendszerint m -mel jelölik), ami két képfelületi pont közti legrövidebb távolságnak és a pontok alapfelületi megfelelői közötti legrövidebb alapfelületi vonal darab hosszának hányadosa. Öt kilométeres távolságig a hossztorzulási tényezőt a távolság közepéhez tartozó lineármódusszal azonosnak

vesszük. A lineármódusz és a hossztorzulási tényező tehát egy dimenzió nélküli arányszám, amelynek értéke 1-hez közel esik.

További fogalom a hosszredukció, ami egy képfelületi távolság és annak az alapfelületi megfelelője közötti érték különbsége.

A lineármódusz (vagy a hossztorzulási tényező, de bármely 1-hez közeli arányszám, amit sok tizedesre kellene kiírni) megadható ppm-egységben (milliomod részként) is. Ilyenkor az 1 kilométeres (alapfelületi) távolságra vonatkoztatjuk a redukció mértékét, és azt mm-egységben adjuk meg (a mm a kilométer milliomod része, *parts per million*), vagyis a mértékegység mm/km. Jelöljük az l lineármódusz ppm-egységben kifejezett értékét megkülönböztetésül S -sel (amit általánosítva a későbbiekben szorzóállandónak nevezünk). Az S jelű ppm-érték számítása az l jelű hányadosból:

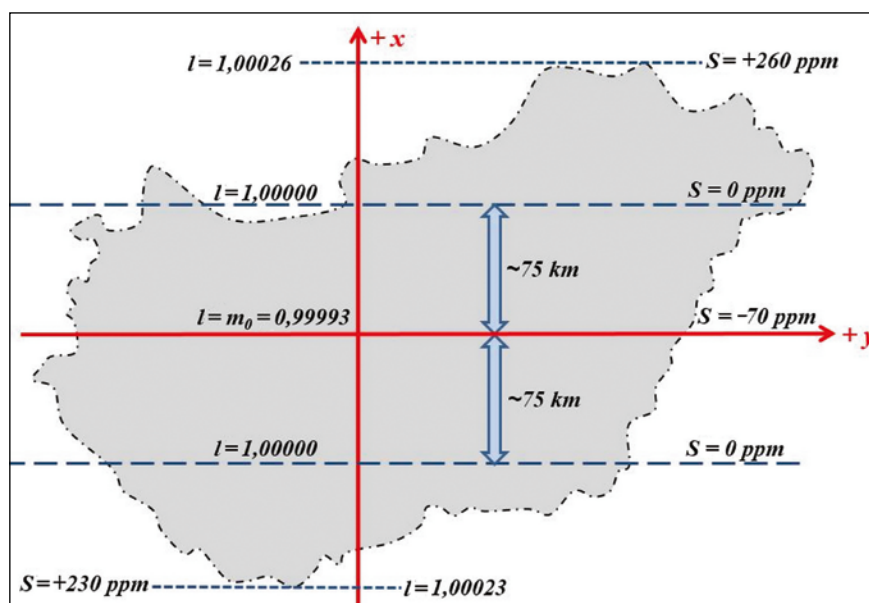
$$S [\text{mm/km}] = S [\text{ppm}] = (l - 1) \times 10^6 = (l - 1) \times 1\,000\,000 \quad (2)$$

Az S értékből az l számítása:

$$l = 1 + S / 1\,000\,000 \quad (3)$$

Fontos tudnunk, hogy nagyságrendileg hogyan alakul a hossztorzulás az EOV esetében (1. ábra).

A vetületi kezdőponttól kb. 75 km-re északra és délre elhelyezkedő két vonal mentén nincs hossztorzulás; ezek az ún. segéd paralelkörök illetve azok képe a vetületen (két y-tengely irányú vonal). E két vonal között



1. ábra. A lineármódusz (hossztorzulási tényező mm/km-ben) alakulása az EOV-ben

hosszkisebbedés lép fel, ennek legnagyobb mértéke a vetületi kezdőponton átmenő segédegyenlítő mentén van, itt a lineármódulusz (hosszredukció) ppm-ben kifejezett mértéke számszerűen: $S = -70 \text{ mm/km}$. A segéd parallelköröktől északra és délre a vetületi hosszak nagyobbak lesznek, mint az alapfelületi megfelelőik. A hossznagyobbodás maximuma Magyarország legészakibb részén $S = +260 \text{ mm/km}$, míg az ország legdélibb vidékén $S = +230 \text{ mm/km}$.

Miért fontos a hosszredukció fogalmának és nagyságrendjének ismerete? Mert bármilyen olyan munka esetén, ahol EOVRendszerben kell a végeredmény és ehhez távmérést használunk, figyelembe kell vennünk a vetületből eredő hossztorzulást. Ez nemcsak alappontsűrítésnél van így, hanem részletmérésnél és kitűzésnél is. A lineármódulusz (és így a vetületi javítás is) a hely függvénye; olyan helyen, ahol például egy 100 méteres távolság akár 1-2 cm-t is változhat a vetítés miatt, ott ezt még részletméréskor/kitűzéskor is figyelembe kell venni.

Vannak esetek (tipikusan a mérnökgeodéziában), amikor kifejezetten ellenjavallt vetületi javítást alkalmazni [9]. Gondoljunk egy több száz méter hosszúságú folyami hídra vagy völgyhídra, ahol előregyártott szerkezeti elemeket használnak fel. A tervező az alaprajzon, metszeten a méretadatokat, koordinátákat méterben adja meg, így is kéri kitűzni. Ha itt vetületi redukciót használnánk, magunk rontanánk el az eredményt. Bár a koordináták itt is „EOV-szerűek”, de a távolságokat nem terhelhetjük vetületi javítással. Ilyenkor, már a létesítmény alapponthálózatának kiépítésekor olyan ún. kvázi-EOVRendszert hoznak létre, amelyben a távolságok az alapfelületi és vetületi redukciótól mentesek (bővebben később).

Távolságok redukálása a gyakorlatban

A mérőállomások használatakor a távmérőegység által mért nyers távolságból több lépésen át jutunk a vízszintes koordinátaszámítások kiinduló távolságadatahoz. Vegyük sorra ezeket a

lépéseket, illetve nevezzük meg a szóban forgó javítást.

1. Összeadó-állandó
2. Geometriai szorzóállandó (frekvenciajavítás)
3. Meteorológiai (atmoszférikus) javítás
4. Magasságkülönbség miatti javítás
5. Alapfelületi javítás
6. Vetületi javítás

A javítások mibenléte, képlete a szakirodalomból ismert, mégis érdemes néhány gyakorlati vonatkozásra felhívni a figyelmet.

Az összeadó-állandót és a geometriai szorzóállandót kalibrálással határozzuk meg (részletesebben a következő fejezetben). Fontos, hogy ezeket előjelhelyesen, jól állítsuk be a mérőállomás paramétereinek között, mert az esetleges előjeltévesztés vagy nagyságrendi hiba durva hibás eredményre vezet.

A meteorológiai javítás a hőmérséklet, a légnyomás és a páratartalom függvénye. Nagyobb (kilométeres) távolságok mérésekor a meteorológiai adatok pontos (vonal menti) meghatározása alapvetően befolyásolja a távmérési eredmény minőségét. Kisebb távolságoknál (mikrohálózatban) csak a hőmérsékletet és a légnyomást szokás megadni. Fontos azonban – mérnökgeodéziai feladatoknál, ahol a pontossági igény ezt megkívánja –, hogy ha a mérés időtartama alatt a hőmérséklet jelentősen változik, akkor azt kövessük a meteorológiai javítás újbóli megadásával is. Egy 100 méteres távolság esetében 10°C hőmérséklet-változás például 1 mm változást jelent a meteorológiai korrekcióban [9].

A magasságkülönbség miatti javítással gyakorlatilag nincs teendőnk, mert a mérőállomás a zenitszöget is méri, és a mért ferde távolságból a vízszintes távolságot is képezi. Fontos, hogy a műszernek ne legyen jelentős indexhibája, illetve azt kompenzálja, ha csak egy távcsoállításban mérünk (az indexhiba negligálása a régebbi, optikai műszereknél okozott jelentős szabályos hibát). Durva hibát okozhat, ha (utófeldolgozás esetén) nem tisztázzuk, hogy a rögzített távolság ferde vagy vízszintes.

Az alapfelületi javítás az alapfelület (tengerszint) feletti magasság függvénye. Nagy magasságkülönbség esetén

ezt a távolság közepére értelmezzük, ezért ismerni kell a két végpont abszolút magasságát és a műszer- illetve jelmagasságát is, valamint a redukciót távolságonként kell elvégezni. Kisebb munkaterületen, rövid távolságok mérésekor a munkaterület átlagos tengerszint feletti magassága alapján redukáljuk az összes távolságot.

A vetületi javítást a lineármódulusz (hossztorzulási tényező) képletéből számítjuk, ami hazánkban, az EOVRendszerben a távolság közepéhez tartozó x koordináta függvénye. Kisebb munkaterület esetén egységesen, egyetlen átlagos x koordinátát adunk meg az összes távolsághoz.

Lényeges és előre tisztázandó kérdés, hogy az előbbi javítások közül melyeket vesszünk figyelembe már a méréskor (amikor a műszer által mutatott és rögzített távolságadat már tartalmaz javításokat is), illetve melyeket az esetleges utófeldolgozáskor. Ehhez ismerni kell a mérőműszer sajátosságait és az elvégzendő feladatot.

A műszerek általában támogatják a felsorolásban szereplő távolságjavítási értékek beállítását (a 4. pontban megadottat automatikusan elvégzik). Vegyük tekintetbe, hogy a geometriai szorzóállandó, a meteorológiai, az alapfelületi és a vetületi javítás mind távolsággal arányos mennyiségek, azaz szorzóállandó-jellegűek.

Ha meghatározzuk a munkaterületre vonatkozó meteorológiai, alapfelületi és a vetületi javítás 1 kilométerre eső értékét, majd ezeket (előjelhelyesen) összevonjuk a geometriai szorzóállandóval, akkor ezt az összevont szorzóállandót beállítva, egyszerre négyféle javítást is figyelembe vettünk.

Jelöljük S -sel a ppm-egységben megadott összevont szorzóállandót, míg, ha hányadosként értelmeznénk azt, akkor nevezzük (összevont) méretarány-tényezőnek és jelöljük m -mel. A méretarány-tényező értelmezése formailag hasonló az (1) képletben megadott, ott l -el jelölt lineármóduluszhoz, így az átszámításra is érvényesek a (2) (3) jelű összefüggések, ha l helyett m -et írunk.

Egy konkrét műszer beállításai előtt alaposan meg kell ismernünk a műszer konfigurációs lehetőségeit, s természetesen tisztában kell lennünk

a végzendő felmérési, kitűzési, mozgásvizsgálati feladatunkkal. Ha utófeldolgozásra kerülne sor, akkor el kell döntenünk, hogy a mérésakor vesszük-e figyelembe a hosszredukciókat (részben vagy teljesen) vagy az utófeldolgozáskor. Fennáll ugyanis az a veszély (a dokumentálás nem megfelelő volta miatt), hogy a redukciókat esetleg kétszer vesszük figyelembe, vagy némelyiket egyszer sem.

A mérőállomások többségénél a felhasználó manuálisan beviteli az aktuális hőmérséklet és légnyomás (páratartalom) értékét, a műszer pedig kiírja a meteorológiai (atmoszférikus) javítást ppm-egységben és azt távolságarányosan figyelembe veszi. Az összeadó-állandó (prizmaállandó) is fontos beviendő, illetve kiválasztandó érték. A mérőállomás gyártója által ajánlott prizma (illetve prizma nélküli mód) esetében az aktuális prizmaállandó beállításához egy listából kell kiválasztanunk a megfelelő prizmatípust; fontos azonban, hogy ebben ne tévedjünk.

Ami az alapfelületi és a vetületi javítást illeti: vannak műszerek, ahol ezek külön-külön beállíthatók, másoknál viszont csak összevont szorzóállandóként illetve méretarány-tényezőként.

Nézzük meg néhány mai mérőállomás konkrét beállítási lehetőségeit.

A Leica mérőállomásoknál megadhatunk egy méretarány-tényezőt akár hányadosként (méretarány), akár ppm-egységben (PPM). Ha hányadosként adtuk meg (amit ebben a cikkben m -mel jelöltünk), akkor a (cikkben S -sel jelölt) ppm-értéket is számítja. A 2. ábra egy mai Leica mérőállomás képernyőképét mutatja, ahol az m méretarány-tényezőnek 0,99993-at adtuk meg, így az S -sel (PPM-nek) jelölt -70 ppm-értéket számította a műszer. Ezen kívül külön is megadható a vetületi javítás ppm értéke (2. ábrán: térképvetület ppm). Ha pedig beírjuk a munkaterület alapfelület feletti magasságát (Magyarországon: tengerszint feletti magasságot; itteni megnevezése: terepi magasság), akkor a műszer kiírja az alapfelületi javítást (magassági ppm). A bevitt méretarány-tényező valamint az alapfelületi és a vetületi javítás összevont értékét itt geometriai ppm-nek nevezik. Azért fontos ezt tisztán látnunk, nehogy kétszer vegyük

2. ábra. A méretarány-tényező, a vetületi és alapfelületi javítás beállítása Leica Ts-10-16-60 mérőállomásban. (Itt magassági ppm-nek nevezik az alapfelületi javítást és geometriai ppm-nek az összevont méretarány-tényezőt.)

3. ábra. A vetületi javítás (grid faktor) és alapfelületi javítás (mags. faktor) beállítása méretarány-tényezőként a SurvCE-szoftverben

4. ábra. A méretarány-tényező megadási lehetősége Topcon- és FOIF-mérőállomásokban

figyelembe például a vetületi javítást, ahogy ez a 2. ábrán is történt.

A többfajta mérőállomás vezérlő szoftvereként használt SurvCE programban külön adható meg a vetületi és az alapfelületi méretarány-tényező, de csak hányadosként, azaz m értéként (3. ábra), a műszer számítja a kettő összevont értékét.

A Topcon- és a FOIF-mérőállomásokban, amennyiben a távolságokat redukálni szeretnénk, egyetlen méretarány-tényező adható meg (hányadosként, azaz m értéként), ami természetesen lehet összevont érték is (4. ábra).

A távmérőegységek kalibrálásának kérdése

A hitelesítés és a kalibrálás a mérésügy fontos fogalmai, de lényegi különbség van közöttük. A hitelesítés hatósági tevékenység, amit eskütelre kötelezett hivatalnok végez, s amiről hitelesítési bizonyítványt ad ki, ami államigazgatási határozatnak minősül. Csak azokat a mérőeszközöket hitelesítik, amelyeket a mérésügyi törvény melléklete felsorol – a geodéziai műszerek nem ilyenek, így azokat kalibráljuk.

A kalibrálás során megállapítjuk a mérőrendszer által jelzett érték és a mérendő mennyiség etalonnal megvalósított értéke közötti összefüggést. A kalibrálás eredményét kalibrálási bizonyítványban kell közölni. A kalibrálási bizonyítványban az eljárásra vonatkozóan minden érdemi adatot dokumentálni kell, így például a mérőeszköz azonosítóját, a kalibrálás helyét, időpontját, a közreműködő személyt, a mérési adatokat, a mérés eredményét és annak mérési bizonytalanságát. Ez utóbbi érték általában a meghatározás szórásának kétszerese. Fontos tudnunk, hogy saját mérőeszköz-kalibrálást a tulajdonos, illetve a felhasználó saját hatáskörben, maga végezheti (amennyiben megfelelő szakértelemmel rendelkezik és erre kiképzett), viszont más tulajdonában lévő mérőeszközt csak akkreditált laboratórium kalibrálhat (az akkreditálási okiratot a Nemzeti Akkreditáló Testület adja ki a laboratóriumnak).

A távmérőegységek esetében a kalibrálás az összeadó-állandó és az esetleges frekvenciahibából adódó geometriai szorzóállandó meghatározását jelenti, ezek gyakorlati végrehajtása a szakirodalomból jól ismert.

Az összeadó-állandó meghatározásához legalább három, egy egyenesen elhelyezkedő (műszerállványon vagy pilléren megvalósított) pont közötti távolságot kell megmérni minden kombinációban. Ilyenkor a kalibrálandó műszer és a prizma (felület) egy mérőegységet jelent. Pontosabb eredményt kapunk, ha több (például 5 vagy 7) pont közötti távolságokat mérjük meg minden kombinációban. Utóbbi elrendezésre már a legkorábbi távmérők megjelenésekor Kádár István kollégánk dolgozott ki kiegyenlítési módszert [6], amit a német szabványba is bevettek.

A geometriai szorzóállandó meghatározásához ismert távolságokat mérünk meg a kalibrálandó műszerrel. Ezek az ismert távolság egy, a kalibrálandó műszernél pontosabb műszerrel szabatosan meghatározottak, eltérő nagyságúak és a legnagyobb távolság megfelel a vizsgált műszer hatótávolságának. Az adott és mért távolságok különbségére regressziós egyenes illeszthető, aminek meredeksége a keresett szorzóállandó, alapértéke pedig az összeadó-állandó.

A műszer öregedése következtében az összeadó-, illetve szorzóállandó változhat, ezért szabatos távmérési igény esetén indokolt ezen távmérési hibák újbóli meghatározása.

A méretarány-tényező értelmezése transzformációknál

A földmérési gyakorlatban igen gyakori a síkbeli vagy térbeli derékszögű koordináta-rendszerek közötti átszámítás, amit rendszerint hasonlósági modell alapján oldunk meg.

A síkbeli hasonlósági transzformáció esetében (nevezik Helmert-transzformációnak is) négy transzformációs paraméter meghatározása a cél: két tengelyirányú eltolási érték, egy elfordulási szög és egy méretarány-tényező [5]. Ehhez legalább két síkbeli közös pontra van szükség, amelyek koordinátái mind az I. jelű forrásrendszerben, mind a II. jelű célrendszerben ismertek.

A térbeli hasonlósági transzformáció esetében (nevezik térbeli Helmertnek is) hét transzformációs paraméter

meghatározása a cél: három tengelyirányú eltolási érték, három elfordulási szög és egy méretarány-tényező. Ehhez legalább három térbeli közös pontra van szükség (így van két fölös adatunk is).

A hasonlósági modell transzformációs egyenlete mátrixos formában:

$$\underline{X}'' = \underline{c} + k \times \underline{R} \times \underline{X}' \quad (4)$$

ahol:

- \underline{X}'' a II. rendszerbeli pont derékszögű koordinátáit tartalmazó vektor (síkbelinél: 2 koordináta, térbelinél: 3 koordináta)
- \underline{X}' az I. rendszerbeli pont derékszögű koordinátáit tartalmazó vektor
- \underline{c} eltolási vektor (síkbelinél: 2 tengelyirányú összetevővel, térbelinél: 3 összetevővel)
- k méretarány-tényező
- \underline{R} forgatási mátrix (síkbelinél 1 elfordulási szöggel, térbelinél: 3 forgatási elemmel)

Nem mindegy, hogy az eltolás irányát, az elfordulás(ok) szögét mikor értelmezzük pozitívnak, illetve negatívnak; ugyanez vonatkozik a méretarány-tényező mint hányados értelmezésére is.

A (4) egyenletben a k jelű méretarány-tényezőt a II. rendszerbeli és az I. rendszerbeli távolságok hányadosaként (átlagértékeként) értelmezzük. Vagyis a k értékkel az I. rendszerbeli távolságokat meg kell szorozni, hogy II. rendszerbeli értékekhez jussunk.

$$k = \text{távolság}^{\text{II}} / \text{távolság}^{\text{I}} \quad (5)$$

Ha a méretarány-tényezőt úgy értelmezzük, hogy az az I. rendszerbeli és a II. rendszerbeli távolságok hányadosa, akkor:

$$M = \text{távolság}^{\text{I}} / \text{távolság}^{\text{II}} = 1 / k \quad (6)$$

Ha a méretarány-tényezőt mindkét értelmezés szerint ppm-egységben adjuk meg, akkor:

$$k[\text{mm/km}] = k[\text{ppm}] = -M[\text{ppm}] \quad (7)$$

Amennyiben ugyanolyan mértékegységben (például méterben) adottak mindkét rendszerben a közös pontok koordinátái, akkor a méretarány-tényező 1-hez nagyon közeli szám lesz.

Nem minden gyakorlati feladatnál szabad hasonlósági transzformációs modellt választani [9]! Példaként erre a már említett kvázi-EOV-rendszer létrehozását hozom, amikor például egy

autópálya folyót keresztez. Az autópálya mentén (és így a folyó mindkét partján) létrehoztunk alappontokat EOV-rendszerben (célszerűen statikus GNSS-méréssel), ezek az alappontok tehát vetületi torzulással terheltek. A híd építéséhez viszont egy pontosabb alaphálózatot létesítünk irány- és távméréssel, amelynek kiegyenlítését szabad hálózatként, önálló rendszerben végezzük, de nem alkalmazunk vetületi és alapfelületi javítást a távolságok esetében. Egy lehetséges praktikus megoldás, ha ezután ezt a szabad hálózatot egybevágósági transzformációval illesztjük a bal parti és jobb parti EOV-s alappontokra, amikor is a méretarány-tényező $k = 1$. Ha ebben az esetben hasonlósági modellt használnánk, azaz nyújtánánk-zsugorítanánk a méter egységben szabatos önálló hálózatumkat, éppen azt a hibát követnénk el, amitől tartózkodni akarunk.

Az ETRS89 és a HD72 közötti méretarány-tényező alakulása és annak oka

Magyarországon ma a két leggyakrabban használt vonatkoztatási rendszer a HD72 (ami a kataszteri és polgári topográfiai térképeink alapját képezi) és az ETRS89 (ami GNSS-méréseink eredeti mérési rendszere) [1]. Az ETRS89 alapfelülete a GRS80 (WGS84) ellipszoid, megvalósítását (alaphálózatát) korábban az OGPSH, jelenleg a GNSSnet aktív hálózat biztosítja Magyarországon. A következőkben olyan kérdésekre próbálok válaszolni, mint hogy mekkora a méretarány-tényező e két fontos vonatkoztatási rendszer között, milyen ennek az eloszlása és miért éppen olyan.

E célból két vizsgálati hálózatot hoztam létre. [3] [4]. A „teljes” jelzővel illetett hálózat az OGPSH 1146 pontját jelenti (mindkét vonatkoztatási rendszerben), amely nem tartalmazza azt az öt pontot, amelyek környezetüktől 20 cm-nél nagyobb hibával eltérnek. Az „elsőrendű” hálózatot az EOVA 141 országhatáron belüli pontja jelenti. Ezek közül 64 elsőrendű ponton közvetlen GPS-mérés történt az OGPSH-kampány során, 17 darab ún. közvetetten mért (levezetett, közeli) GPS-pont;

a kampány során nem mért többi elsőrendű pontot EOVS-GPS irányú térbeli hasonlósági transzformációval számítottam át ETRS89-rendszerbe. A továbbiakban az I. jelű forrásrendszer az ETRS89 (WGS84) lesz, a II. jelű célrendszer pedig a HD72.

Ha elvégezzük a hétparaméteres térbeli Helmert-transzformációt az elsőrendű hálózatban, az 1. táblázatban szereplő, összegző statisztikát kapjuk; a vízszintes értelmű maradék ellentmondások (javítások) országon belüli eloszlása pedig az 5. ábrán illetve a 6. ábrán látható képet mutatja. Jól ismert tény, hogy a maradék ellentmondások vízszintes értelemben ± 40 cm és ± 40 cm

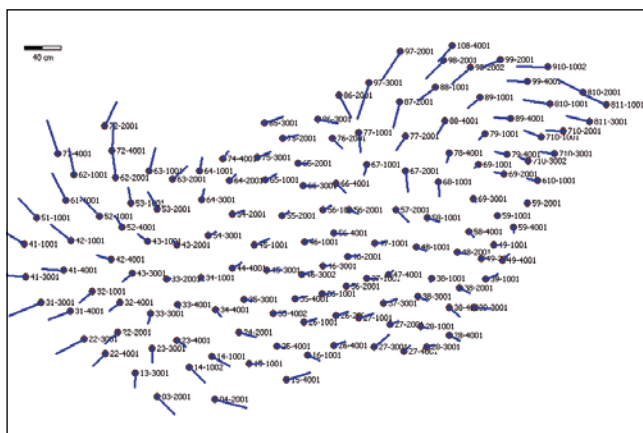
között változnak. Éppen ennek következménye, hogy csak lokális transzformációval érhetünk el földmérési célra elfogadható eredményt (ezért született az EHT-, illetve a VITEL-szoftver). Számunkra a transzformációs paraméterek közül most a méretarány-tényező érdekes, ami $k = +4,7$ mm/km értékű. Csak akkor kapunk reális értéket, ha ellipszoidfelszíni ún. 2D-s megoldást használunk, vagy geoidmodellt is figyelembe veszünk a transzformációnál. Megjegyzem, hogy a legtöbb országos transzformációs paraméterkészletben megadott $k = -2$ mm/km körüli érték torz, mert magába foglalja a geoid-ellipszoid különbözőségéből

adódó kompenzációt, ezért az nem a két rendszer méretviszonyát jellemző reális érték.

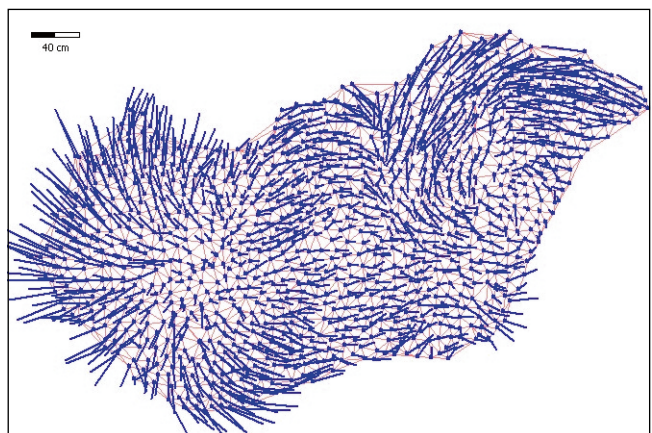
Nézzük meg most a méretarány-tényező eloszlását, hogyan alakul az ország különböző területein. Értelmezzük a pontbeli méretarány-tényezőt az egy pontból kiinduló irányokra vonatkozó ellipszoidi méretarány-tényezők átlagértékeként. Ellipszoidi méretarány-tényező alatt a végpontok ellipszoidi földrajzi koordinátáiból számítható I. rendszerbeli ellipszoidi ívhossz és a II. rendszerbeli ellipszoidi ívhossz hányadosát értve. Az elsőrendű vizsgálati hálózat maga is háromszögelési hálózat, az egy

1. táblázat. A térbeli hasonlósági transzformációkból származó maradék ellentmondások összefoglaló statisztikai adatai, ETRS89-HD72 irányban (méterben).

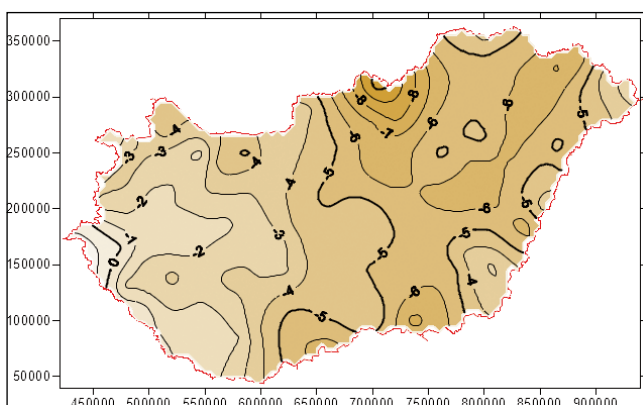
Vizsgálati hálózat és transzf. modell	szórás			terjedelem			átlagos eltérés			Méretarány-tényező (k) [ppm]
	my	mx	mH	Ty	Tx	TH	dy	dx	dH	
1. rendű (3D-s)	0,17	0,14	0,41	0,80	0,82	1,86	0,14	0,10	0,32	-2,03
1. rendű (2D-s)	0,15	0,13		0,74	0,77		0,13	0,09		+4,70
1. rendű (3D-s + geoidmodell)	0,15	0,13	0,09	0,73	0,77	0,62	0,13	0,10	0,07	+4,71



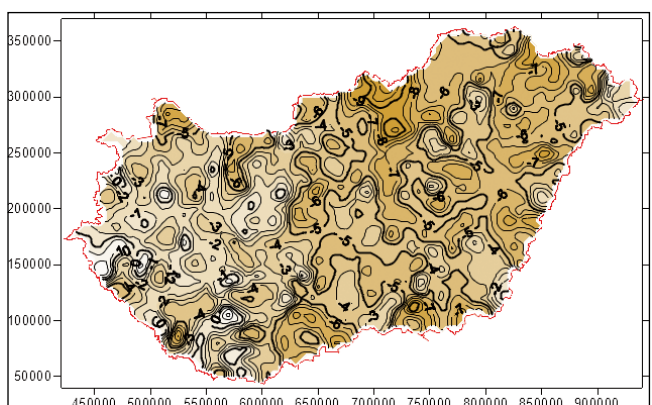
5. ábra. Vízszintes értelmű maradék ellentmondások az elsőrendű vizsgálati hálózatban



6. ábra. Vízszintes értelmű maradék ellentmondások a teljes vizsgálati hálózatban



7. ábra. Az ETRS89-HD72 méretarány-tényező 141 pontból számított pontbeli értékének alakulása az elsőrendű hálózatban



8. ábra. Az ETRS89-HD72 méretarány-tényező 1146 pontban számított pontbeli értékének változása

2. táblázat. A méretarány-tényezők oldalakból számított statisztikája a két vizsgálati hálózatban

Vizsgálati hálózat	Pontok száma	Távolságok száma	M min [ppm]	M max [ppm]	M átlag [ppm]
elsőrendű	141	370	-15,5	+2,9	-4,34
teljes	1146	3403	-26,8	+25,7	-4,33

pontból kiinduló irányok a háromszögek megfelelő oldalai. A teljes hálózat háromszögekre bontását Delaunay-féle háromszögeléssel végeztem, így értelmezendők a szomszédos pontokra menő irányok.

A két vizsgálati hálózat pontonkénti méretarány-tényezőjének izovonalas rajza a 7. és 8. ábrákon látható, statisztikája pedig a 2. táblázatban. A teljes hálózat ábrája sokkal részletgazdagabb, mint az elsőrendű hálózaté, a helyi torzulásokkal terhelt területek jobban kivethetők. Arra a tényre, hogy kelet-nyugati irányban jelentős méretarány-különbség van az EOVA-hálózatban, Borza Tibor kollégánk már az OGPSH teljes elkészülte előtt rámutatott az akadémiai doktori dolgozata 71. oldalán, és tudományos szempontból a méretarány részletes kimutatásának igényét vetette fel [2].

A következő vizsgálatom az EOVA kiegyenlítésénél felhasznált 21 darab távolság méretarány-tényezőjére irányult. Összesen 23 ilyen távolság került be az EOVA kiegyenlítésébe, de kettő ezek közül túlnyúlik az országhatáron (az ábrán ezért nem szerepel a kozmikus poligon 1. és 12. sorszámú szakasza), így végponti koordinátáik nem állnak rendelkezésre (9. ábra).

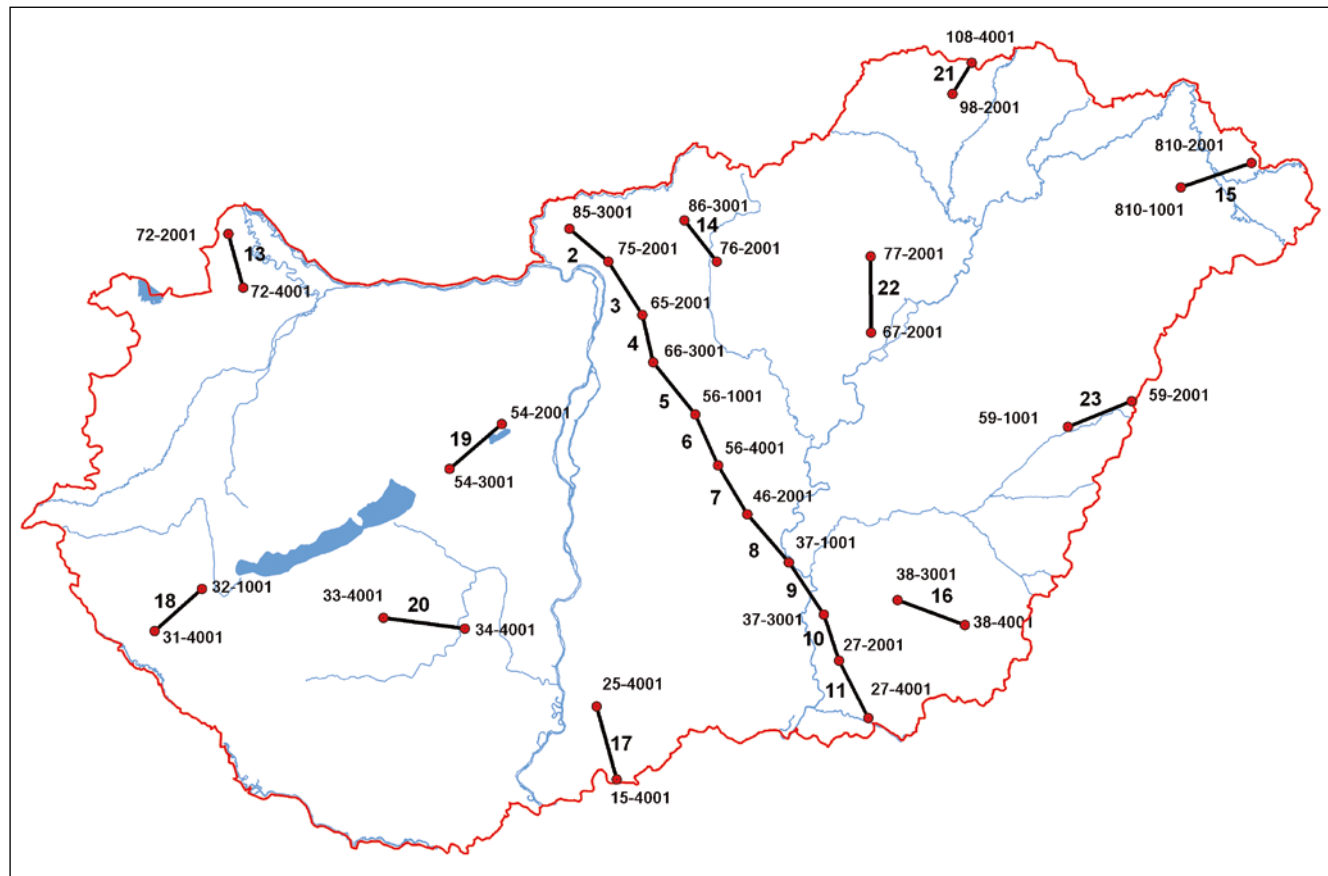
A GPS-mérésből és a fénytávmerésből származó 21 távolság összevetéséből megállapítható, hogy minden GPS-ből származó távolság kisebb a fénytávmerővel mért értéknél. A 21 távolság alapján egy GPS-es elsőrendű oldalhossz átlagosan 11 cm-rel rövidebb, mint egy fénytávmerővel mért oldal (3. táblázat). Vagyis szabályos hiba mutatkozik a távmerővel és a GPS-technikával mért távolságok között.

A 21 távolság esetében az átlagos méretarány-tényező $M = -4,5$ ppm, ami

hasonló nagyságú, mint az összes elsőrendű oldalból levezetett $M = -4,3$ ppm-érték, illetve a transzformációból származó $k = 4,7$ ppm-érték.

Fontos adalék, hogy az elsőrendű EOVA-hálózat korrelátamódszerrel történt kiegyenlítésében a fénytávmerővel mért távolságokat kényszerfeltételként szerepeltették, azaz a távolságok nem kaptak javítást. (Az eredetileg 167 pontból álló, az ellipszoid felszínén történt szabad hálózati kiegyenlítésben a 23 távolságon kívül 900 irány és 40 azimut szerepelt – az utóbbiak természetesen kaptak javítást [8]. A kiegyenlítés utáni iránymérési középhiba $m_{irány} = 0,434''$. Ez 25 km-es átlagos oldal esetén 53 mm lineáris eltérést jelent, ami $R = 1/472\ 000$ átlagos relatív hibának felel meg.)

Arra jutottam tehát, hogy az ETRS89 magyarországi megvalósítása és a klaszikus HD72 vízszintes vonatkoztatási rendszer között egy viszonylag jelentős, 4,7 ppm-értékű méretarány-eltérés van, amit az 1970-es évek elején távmerővel mért és az EOVA kiegyenlítésébe kényszerként bevitt távolságok okoznak. Ennek a következménye



9. ábra. Az elsőrendű EOVA-hálózatban fénytávmerővel mért távolságok

3. táblázat. A méretarány-tényező alakulása az elsőrendű hálózatban távmérővel mért távolságok esetében

Azonosító	Ellipszoidi távolság (WGS84)	Ellipszoidi távolság (GRS67)	Táv. eltérés (ell.)	M [ppm]
2	19920,644	19920,739	-0,095	-4,7
3	24915,786	24915,898	-0,112	-4,5
4	19035,960	19036,047	-0,087	-4,6
5	26297,477	26297,666	-0,189	-7,2
6	21928,623	21928,659	-0,036	-1,7
7	22391,689	22391,816	-0,127	-5,7
8	24938,406	24938,521	-0,115	-4,6
9	24682,116	24682,253	-0,138	-5,6
10	19095,437	19095,535	-0,098	-5,2
11	25346,327	25346,483	-0,156	-6,1
13	21814,254	21814,429	-0,175	-8,0
14	20097,502	20097,611	-0,109	-5,4
15	29478,319	29478,420	-0,101	-3,4
16	28208,990	28209,091	-0,100	-3,6
17	29579,190	29579,368	-0,178	-6,0
18	24847,341	24847,410	-0,069	-2,8
19	27053,086	27053,178	-0,092	-3,4
20	32164,447	32164,555	-0,108	-3,4
21	14461,544	14461,568	-0,024	-1,7
22	29937,484	29937,559	-0,075	-2,5
23	27029,822	27029,942	-0,120	-4,4
Átlag:		24439	-0,110	-4,5

a transzformáció maradék ellentmondásainak örvénylő képet mutató rajza (6. ábra). Ezt az eredeti, a Kraszovszkij-féle ellipszoidon elhelyezett elsőrendű háromszögelési hálózat újbóli (javított távolságokkal történő) kiegyenlítésével igazolhatnánk, amire jelenleg nincs lehetőség. Egyszerűsített megoldással azonban élhetünk, ha van vízszintes hálózatkiegyenlítő programunk. Képezzünk az országhatáron belüli hálózatrészből egy 146 pontból álló tisztán irányméréses vízszintes hálózatot. Az eredeti irányértékeket (összesen 740-et) javítsuk meg a második irányredukcióval, így már az EOV síkján értenődök. Ezután kétféle vízszintes szabad hálózatot számítsunk. Az egyikbe, az irányértékek mellett vonjunk be 21 távolságot, amit EOV-síkra redukálunk a GRS67 alapfelületi eredeti távolságokból. A másik hálózat abban különbözik az előzőtől, hogy a térbeli távolságokat az ETRS89-koordinátákból vesszük át és szintén EOV-síkra redukáljuk azokat. Ha a szabad hálózati kiegyenlítésből kapott koordinátákat ezután síkbeli

transzformációval összehasonlítjuk, az eltérések ugyanazt az ábrát fogják mutatni, mint amit korábban láttunk.

Összefoglalás

A méretarány-tényező a földmérési gyakorlatban sűrűn előforduló fogalom, illetve beállítási paraméter. Mérőállomás használatakor, amikor a mért nyers távolságokat a vetületi síkra redukáljuk, fontos ismernünk, hogy az adott mérőműszerben hogyan tudjuk az egyes redukciókat érvényesíteni. Leggyakrabban ezt összevont méretarány-tényezőként (szorzóállandóként) tesszük, ami megadható hányadosként vagy ppm-értékként.

A méretarány-tényező az egyik paramétere a síkbeli, illetve térbeli hasonlósági transzformációnak. Érdekes (és a transzformációs gyakorlatot alapvetően érintő) kérdés, hogy hogyan alakul az ETRS89 és a HD72 rendszerek közötti méretarány-tényező az ország területén. A miértre saját kutatásom alapján próbáltam válaszolni.

Írásommal a hazai földmérési gyakorlatot szerettem volna segíteni, régi ismeretek felelevenítésével és a gyakorlati kérdések tisztázásával.

Irodalom

- [1] Ádám József 2003. A felsőgeodézia helyzete és időszerű feladatai Magyarországon. Székhelyül a Magyar Tudományos Akadémián, 1995–98., VI. kötet, Budapest.
- [2] Borza Tibor 1997. A GPS technikára alapozott háromdimenziós geodézia és hazai bevezetése. Akadémiai doktori értekezés. Kézirat. Budapest.
- [3] Busics György 2007. A műholdas helymeghatározás geodéziai alkalmazásának technológiai és minőségi kérdései. PhD-értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, p. 99
- [4] Busics György 2009. Az ETRS89 és a HD72 vonatkoztatási rendszerek közötti méretaránytényező kérdése. Geomatikai Közlemények XII. kötet, MTA GGKI, Sopron HU ISSN 1419-6492. pp. 151–161.
- [5] Gyenes Róbert 2010. Geodézia 2. A Föld elméleti alakja. Koordinátatranszformációk. TAMOP 4.2.5. pályázat könyvei. www.tankonyvtar.hu. https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_GED2/ch01s04.html
- [6] Halmos Ferenc – Kádár István 1972. Az elektronikus fénytávérők összeadó-állandójának meghatározása. Geodézia és Kartográfia, No. 2. pp. 107–113.
- [7] Hazay István 1986. A térkép méretaránya. Geodézia és Kartográfia, No. 4. pp. 234–238.
- [8] Lukács Tibor 1996. A Magyar asztrogeodéziai hálózat önálló kiegyenlítése. In Jóó I. – Raum F. (szerk.): A magyar földmérés és térképészet története. Budapest, 3. kötet, C. 6.26. fejezet. pp. 534–539.
- [9] Takács Bence – Siki Zoltán – Égető Csaba – Bényi László 2018. Mérnökgeodéziában alkalmazott alapponthálózatok. A jó gyakorlat bemutatása mintapéldákkal. Magyar Mérnöki Kamara kiadványsorozata, 2. szám. MMK FAP azonosító: 2018/105 GGT. Budapest, p. 81
- [10] Varga József 2006. Vetületi rendszerek és átszámítások. PhD-értekezés, BME, Budapest.
- [11] Varga József: A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig. www.agt.bme.hu <http://www.agt.bme.hu/varga/Osszes/Dok3uj.htm#EOV>



Dr. Busics György
c. egyetemi tanár

Óbudai Egyetem
Alba Regia Műszaki Kar
busicsgy@gmail.hu